Horizonte infinito:

El problema del consumidor se puede escribir:

$$\max_{c_1^i, \dots} \underbrace{\sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} u_i(c_t^i)}\quad \text{s.a.} \quad \underbrace{\sum_{t=1}^{\infty} P_t c_t^i}_{\text{gastos en valor presente}} \leq \underbrace{\sum_{t=1}^{\infty} P_t y_t^i}_{\text{ingresos en valor presente.}}$$

↳ Dado que $u' > 0$ en equilibrio esta restricción se cumple con igualdad.

También se puede resolver:

$$\max_{c_1^i, \dots, b_1^i, \dots} \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} u_i(c_t^i) \quad \text{s.a.}$$

- $c_t^i + b_t^i = y_t^i + (1+r_{t-1}) b_{t-1}^i$
- No Ponzi:

$$\lim_{T \to \infty} \frac{b_T}{(1+r_1)\cdots(1+r_{T-1})} \geq 0$$

para que el problema esté bien definido

- Condición de transversalidad:

$$\lim_{T \to \infty} \frac{b_T}{(1+r_1)\cdots(1+r_{T-1})} = 0$$

Para tener cond. necesarias + suficientes para el óptimo.

$$\mathcal{L} = \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} u_i(c_t^i) + \sum_{t=1}^{\infty} \lambda_t \left(y_t^i + (1+r_{t-1}) b_{t-1}^i - c_t^i - b_t^i \right)$$

↳ hay un λ_t para cada t.

$$\boxed{P_t = \frac{1}{(1+r_1)\cdots(1+r_{t-1})}}$$

Si el individuo renuncia a una unidad de consumo en $t=1$ y la ahorra hasta t, puede consumir en t:

$$(1+r_1)(1+r_2)\cdots(1+r_{t-1})$$

Es decir, si el individuo renuncia en $t=1$ a:

$\frac{1}{(1+r_1)\cdots(1+r_{t-1})}$ y lo ahorra hasta t, puede consumir en t:

$$\left(\frac{1}{(1+r_1)\cdots(1+r_{t-1})}\right)\cdot(1+r_1)\cdots(1+r_{t-1}) = 1.$$

Cobb-Douglas: $\sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} \ln C_t^i$

$$\mathcal{L} = \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} \ln C_t + \underbrace{\sum_{t=1}^{\infty} \lambda_t \left(y_t + (1+r_{t-1}) b_{t-1} - C_t - b_t\right)}$$

CPO: $[C_t]$: $\frac{\beta^{t-1}}{C_t} = \lambda_t$

$$\cdots + \lambda_t\left[y_t + (1+r_{t-1})b_{t-1} - C_t - b_t\right] + \lambda_{t+1}\left(y_{t+1} + (1+r_t)b_t - C_{t+1} - b_{t+1}\right) + \lambda_{t+2}(\ldots) + \ldots$$

$[b_t]$: $\lambda_t = \lambda_{t+1}(1+r_t)$

$\lambda_t = \frac{\beta^{t-1}}{C_t}$ $\qquad$ $\lambda_{t+1} = \frac{\beta^{t}}{C_{t+1}}$

$$\boxed{\frac{C_{t+1}}{C_t} = \beta(1+r_t)}$$

Si se resuelve el problema en términos de P_t:

$$\boxed{\frac{C_{t+1}}{C_t} = \beta\frac{P_t}{P_{t+1}}}$$

si reemplazamos P_t, llegamos a la misma condición.

$$\frac{C_t}{C_{t-1}} = \beta\frac{P_{t-1}}{P_t}, \quad \frac{C_{t-1}}{C_{t-2}} = \beta\frac{P_{t-2}}{P_{t-1}}, \ldots$$

$$\left(\frac{C_t}{\cancel{C_{t-1}}}\right)\cdot\left(\frac{\cancel{C_{t-1}}}{\cancel{C_{t-2}}}\right)\left(\frac{\cancel{C_{t-2}}}{\cancel{C_{t-3}}}\right)\cdots\left(\frac{\cancel{C_2}}{C_1}\right) = \left(\beta\frac{\cancel{P_{t-1}}}{P_t}\right)\left(\beta\frac{\cancel{P_{t-2}}}{\cancel{P_{t-1}}}\right)\cdots\left(\beta\frac{P_1}{\cancel{P_2}}\right)$$

$$\frac{C_t}{C_1} = \beta^{t-1}\frac{\cancel{P_1}\,1}{P_t} \Rightarrow \boxed{\frac{C_t}{C_1} = \frac{\beta^{t-1}}{P_t}} \quad \forall t$$

$$\boxed{\sum_{t=1}^{\infty} P_t C_t = \sum_{t=1}^{\infty} P_t y_t}$$ restr. intertemporal.

$$\boxed{c_t p_t = \beta^{t-1} c_1}$$

$$\Rightarrow \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} c_1 = \sum_{t=1}^{\infty} p_t y_t$$

$$c_1 \underbrace{\sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1}}_{\frac{1}{1-\beta}} = \boxed{\sum_{t=1}^{\infty} p_t y_t} \quad \Rightarrow \quad \boxed{c_1^* = (1-\beta) \underbrace{\sum_{t=1}^{\infty} p_t y_t}_{\text{riqueza}}}$$

$$\boxed{c_t^* = \frac{(1-\beta)\beta^{t-1}}{p_t} \sum_{t=1}^{\infty} p_t y_t}$$

CES: $u(c) = \dfrac{c^{1-\frac{1}{\sigma}} - 1}{1-\frac{1}{\sigma}}$

Euler: $\left(\dfrac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{\frac{1}{\sigma}} = \beta(1+r_t)$

$$\Rightarrow \boxed{c_1 = \frac{\sum p_t y_t}{\sum \frac{\beta^{\sigma(t-1)}}{p_t^{\sigma-1}}}} \qquad \boxed{c_T = \left(\frac{\beta^{T-1}}{p_T}\right)^{\sigma} \left(\frac{\sum p_t y_t}{\sum \frac{\beta^{\sigma(t-1)}}{p_t^{\sigma-1}}}\right)}$$

Independientemente de cuál problema resolvemos, el perfil de ahorros del individuo:

$$b_0 = 0, \quad b_1^* = y_1 - c_1^*, \quad b_2^* = y_2 - c_2^* + (1+r_1) b_1^*, \ \ldots$$

Qué ocurre cuando hay choques a los ingresos?

Ej: choque transitorio en el primer periodo:

Supong: $r_t = \rho$ es decir $\beta(1+r_t) = 1. \longrightarrow 1+r_t = \dfrac{1}{\beta} \ \forall t.$

$u(c) = \ln c$

$$y_t^i = \bar{y}^i \quad \forall t > 1.$$

$$y_1^i = \bar{y}^i + \boxed{\varepsilon} \longleftarrow \text{en } t=1.$$

$$P_t = \frac{1}{(1+r_1)\cdots(1+r_{t-1})} = \underbrace{\left(\frac{1}{1+r_1}\right)}_{\beta} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{1+r_2}\right)}_{\beta} \cdots \underbrace{\left(\frac{1}{1+r_{t-1}}\right)}_{\beta} = \beta^{t-1}$$

$$c_1 = (1-\beta) \sum_{t=1}^{\infty} P_t y_t$$

$$= (1-\beta)\left(\bar{y} + \varepsilon + P_2 \bar{y} + P_3 \bar{y} + \cdots\right)$$

$$= (1-\beta)\left(\varepsilon + \sum_{t=1}^{\infty} \cancel{P_t}^{\,\beta^{t-1}} \bar{y}\right) = (1-\beta)\left(\varepsilon + \bar{y} \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1}\right)$$

$$= (1-\beta)\left(\varepsilon + \frac{\bar{y}}{1-\beta}\right) = \bar{y} + \varepsilon(1-\beta)$$

$$\boxed{c_1 = \bar{y} + \varepsilon(1-\beta)}$$ → individuo consume $(1-\beta)$ del choque al ingreso y el resto lo ahorra.

$$\boxed{b_1 = y_1 - c_1 = \beta\varepsilon}$$ — Si β es muy alto, el individuo es muy paciente y ahorra gran parte del ingreso adicional para consumir en el futuro.

$$b_2 = y_2 - c_2 + (1+r_1)\, b_1 = \beta\varepsilon$$

$$b_3 = \beta\varepsilon$$

$$\vdots$$

} cada periodo, individuo ahorra lo mismo y consume los intereses generados por ese ahorro.

Ahorrador toda la vida.

Ej: Dotaciones crecientes y convergentes:

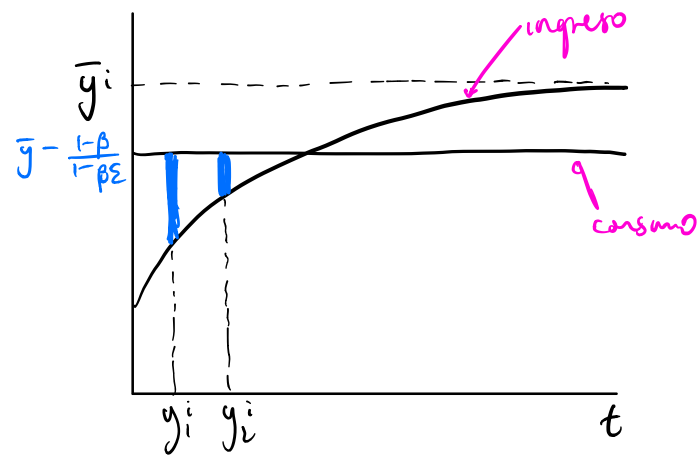
$$r_t = \rho \qquad (\beta(1+r_t) = 1).$$

$$y_t^i = \bar{y}^i - \varepsilon^{t-1}, \quad t \geq 1, \quad \varepsilon < 1, \quad \bar{y}^i > 1.$$

Como $\varepsilon < 1$, $\varepsilon^1 > \varepsilon^2 > \varepsilon^3 > \dots > 0$

$$y_1^i < y_2^i < y_3^i < \dots < \bar{y}^i$$

Como $\lim_{t \to \infty} \varepsilon^{t-1} = 0 \Rightarrow \lim_{t \to \infty} y_t^i = \bar{y}^i$



$$c_1 = (1-\beta)\left(\sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1}\left(\bar{y} - \varepsilon^{t-1}\right)\right)$$

$$= (1-\beta)\left(\sum \beta^{t-1}\bar{y} - \sum \beta^{t-1}\varepsilon^{t-1}\right)$$

$$= (1-\beta)\left(\frac{\bar{y}}{1-\beta} - \sum_{t=1}^{\infty}(\beta\varepsilon)^{t-1}\right)$$

$$= \bar{y} - (1-\beta)\cdot\frac{1}{1-\beta\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \boxed{c_1^* = \bar{y} - \frac{1-\beta}{1-\beta\varepsilon}}$$

Como $\beta(1+r_t) = 1 \Rightarrow$ Euler: $\frac{c_t}{c_1} = 1 \Rightarrow \boxed{c_t^* = c_1^*}$

$$b_1 = y_1 - c_1 = \underbrace{\bar{y} - 1}_{\text{ingreso}} - \underbrace{\left(\bar{y} - \frac{1-\beta}{1-\beta\varepsilon}\right)}_{\text{consumo}}$$

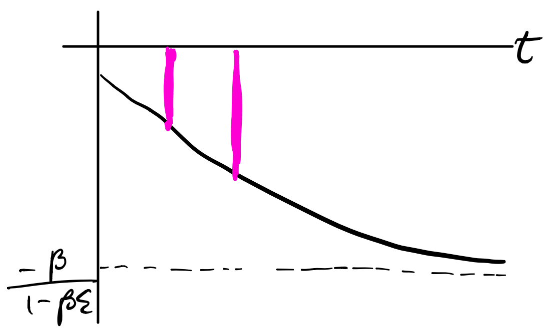
$$b_1 = -\beta\left(\frac{1-\varepsilon}{1-\beta\varepsilon}\right) < 0$$

$$b_2 = -\beta\left(\frac{1-\varepsilon^2}{1-\beta\varepsilon}\right), \quad b_3 = -\beta\left(\frac{1-\varepsilon^3}{1-\beta\varepsilon}\right), \quad \dots$$

$$\boxed{b_t = -\beta\left(\frac{1-\varepsilon^t}{1-\beta\varepsilon}\right)}$$

$$b_t = \frac{-\beta}{1-\beta\varepsilon} + \underbrace{\frac{\beta\varepsilon^t}{1-\beta\varepsilon}}_{\xrightarrow[t\to\infty]{} 0} \longrightarrow \text{deuda es creciente.}$$

$$\lim_{t\to\infty} b_t = \boxed{\frac{-\beta}{1-\beta\varepsilon}}$$



← Deudor toda la vida.

Se cumplen No Ponzi y transversalidad porque:

$$\lim_{T\to\infty} P_T b_T = 0$$

Equilibrio competitivo:

Consumos $\{c_t^i\}_{t=1}^{\infty}$, posiciones financieras $\{b_t^i\}_{t=1}^{\infty}$ y precios $\{r_t\}_{t=1}^{\infty}$, $\{P_t\}_{t=1}^{\infty}$ tal que hogares optimizan y mercados se vacían: $\sum_{i=1}^{I} c_t^i(r_1, \dots) = \sum_{i=1}^{I} y_t^i \quad \forall t.$

Con agente representativo: $c_t = y_t$.

$$u'(c_t) = \beta(1+r_t)\,u'(c_{t+1}) \Rightarrow \boxed{1+r_t^* = \frac{1}{\beta}\,\frac{u'(y_{t+1})}{u'(y_t)}}$$

r_t^* sólo depende de dotacciones en t y $t+1$.
$\Rightarrow$ choques a y_t afectan r_t, r_{t-1}.

$$P_t = \beta^{t-1} \frac{u'(y_t)}{u'(y_1)}$$

Con cobb-Douglas: $P_t = \beta^{t-1} \left(\frac{y_1}{y_t}\right)$

Con CES: $P_t = \beta^{t-1} \left(\frac{y_1}{y_t}\right)^{\frac{1}{\sigma}}$

Riqeza de los hogares:

Con cobb-Douglas: $\sum_{t=1}^{\infty} \underline{P_t y_t} = \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} \left(\frac{y_1}{\cancel{y_t}}\right) \cdot \cancel{y_t} = \frac{y_1}{1-\beta} < \infty$

$\boxed{P_t y_t} = \underline{\beta^{t-1} y_1}$

Si $y_t \uparrow \Rightarrow P_t \downarrow$

Con cobb-douglas, aumentos en dotaciones generan caída en precios en exactamente la misma proporción $\Rightarrow$ riqueza no cambia.

Con CES: $\sum_{t=1}^{\infty} P_t y_t = y_1^{\frac{1}{\sigma}} \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} y_t^{1-\frac{1}{\sigma}}$

Riqueza no necesariamente es finita. Depende del perfil de las dotaciones a lo largo del tiempo $\Rightarrow$ se necesitan supuestos adicionales para tener un problema bien definido.

Ej: Supongamos $y_t = \bar{y} \quad \forall t \geq 1$.

$$P_t = \beta^{t-1} \left(\frac{y_1}{y_t}\right)^{\frac{1}{\sigma}} = \beta^{t-1}$$

$$\Rightarrow \sum_{t=1}^{\infty} P_t y_t = \frac{\bar{y}}{1-\beta}, \quad 1 + r_t = \frac{1}{\beta} \left(\frac{y_{t+1}}{y_t}\right)^{\frac{1}{\sigma}} = \frac{1}{\beta} = 1 + \rho.$$

Ej: Crecimiento sostenido de ingresos:

$$\underline{y_t = y_1(1+\eta)^{t-1}}, \quad t \geq 1$$

η: tasa de crecimiento de dotaciones.

$$P_t = \beta^{t-1}\left(\frac{y_1}{y_t}\right)^{\frac{1}{\sigma}} = \beta^{t-1}\left(\frac{\cancel{y_1}}{\cancel{y_1}(1+\eta)^{t-1}}\right)^{\frac{1}{\sigma}} = \beta^{t-1}\left(\frac{1}{(1+\eta)^{t-1}}\right)^{\frac{1}{\sigma}}$$

$$P_t y_t = y_1(1+\eta)^{t-1}\beta^{t-1}\left(\frac{1}{(1+\eta)^{t-1}}\right)^{\frac{1}{\sigma}}$$

$$= \beta^{t-1} y_1\left((1+\eta)^{t-1}\right)^{1-\frac{1}{\sigma}}$$

$$\Rightarrow \sum_{t=1}^{\infty} P_t y_t = y_1 \underbrace{\sum_{t=1}^{\infty}\left(\beta(1+\eta)^{1-\frac{1}{\sigma}}\right)^{t-1}}$$

converge $\Leftrightarrow$ $\boxed{\beta(1+\eta)^{1-\frac{1}{\sigma}} < 1}$

Debemos asumir que $\beta(1+\eta)^{1-\frac{1}{\sigma}} < 1$ para que problema esté bien definido.

Con agentes heterogéneos: I consumidores potencialmente distintos.

Condiciones de vaciado: $\underbrace{\sum_{i=1}^{I} c_t^{i*}}_{C_t} = \underbrace{\sum_{i=1}^{I} y_t^i}_{Y_t}$.

Está bien definido el problema con agentes herogéneos siempre?

NO, debemos asumir ciertas cosas:

Preferencias: horizonte infinito impone restricciones sobre preferencias: No puede haber diferencias en factores de descuento de los individuos.

Supongamos que hay 2 consumidores A y B: $\beta^B > \beta^A$.
B es más paciente que A.

En eq. Euler: $\frac{C_{t+1}^A}{C_t^A} = \beta^A(1+r_t)$

$$\frac{C_{t+1}^B}{C_t^B} = \beta^B(1+r_t)$$

$$\Rightarrow \frac{C_t^A}{C_t^B} = \underbrace{\left(\frac{\beta_A}{\beta^B}\right)}_{<1}^{t-1} \cdot \left(\frac{C_1^A}{C_1^B}\right)$$

$\beta^A < \beta^B \Rightarrow \frac{\beta^A}{\beta^B} < 1$

$$\lim_{t\to\infty} \left(\frac{\beta^A}{\beta^B}\right)^{t-1} = 0$$

Es decir, si asumimos $\beta^B > \beta^A \Rightarrow \frac{C_t^A}{C_t^B} \xrightarrow{t\to\infty} 0$

$$\Rightarrow \underbrace{C_t^A \longrightarrow 0, \quad C_t^B \longrightarrow \infty}$$

Esto debe ocurrir si $\beta^B > \beta^A$ pero no es factible.

$\Rightarrow$ Con horizonte infinito NO pueden existir tasas de descuento diferentes.

Dotaciones: todos tienen mismo factor de descuento y mismas preferencias.

Supongamos que hay heterogeneidad en dotaciones.
En óptimo: $C_{t+1}^i = \beta(1+r_t) C_t^i \rightarrow$ Euler para i

Sumando a través de i:

$$\sum_{i=1}^{I} c_{t+1}^{i} = \sum_{i=1}^{I} \beta(1+r_t) c_t^{i} = \beta(1+r_t) \sum_{i=1}^{I} c_t^{i}$$

tasa es igual para todos los individuos

En eq: $\sum_{i=1}^{I} c_t^i = \sum_{i=1}^{I} y_t^i$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{i=1}^{I} y_{t+1}^{i}}_{Y_{t+1}} = \beta(1+r_t) \underbrace{\sum_{i=1}^{I} y_t^{i}}_{Y_t}$$

En eq. con agentes heterogéneos:

$$Y_{t+1} = \beta(1+r_t) Y_t \quad \Rightarrow \boxed{1+r_t^{*} = \frac{1}{\beta} \frac{Y_{t+1}}{Y_t}}$$

Riqueza agregada en la economía con Cobb-Douglas:

$$\sum_{t=1}^{\infty} p_t^{*} Y_t = \frac{Y_1}{1-\beta} < \infty .$$

Riqueza agregada es finita e independiente de la evolución de los perfiles individuales de dotaciones.

Política fiscal en modelo de intercambio:

- No hay decisión ocio vs consumo
- Oferta de bienes perfectamente elástica.

$\Rightarrow$ política tributaria no tiene efectos distorsivos.

Política tributaria:

- Gobierno grava algunas actividades y devuelve recaudación con transferencia de suma fija.
- Mantiene presupuesto balanceado: ingresos$_t$ = gastos$_t$.

↳ No hay endeudamiento.

- Restricción presupuestal de hogares:

$$C_t^i + b_t^i = y_t^i + (1+r_{t-1})\,b_{t-1}^i - T_t^i + \Omega_t^i$$

T_t = impuestos, Ω_t = transferencias.

Impuestos al ingreso:

- τ_t^y : tasa de impuestos al ingreso.
- Ingreso de los hogares viene de dos fuentes:
  - dotación de bienes y_t^i
  - ingresos por intereses.
- Base gravable: $\boxed{y_t + r_{t-1}\,b_{t-1}}$

$$T_t = \tau_t^y\left(y_t + r_{t-1}\,b_{t-1}\right)$$

- Restricción presupuestal:

$$C_t + b_t = \underbrace{(1-\tau_t^y)\,y_t}_{\text{dotaciones netas de impuestos}} + \Big(1+\underbrace{(1-\tau_t^y)\,r_{t-1}}_{\text{tasa de interés neta de impuestos.}}\Big)\,b_{t-1} + \underbrace{\Omega_t}_{\text{transferencias que el hogar anticipa.}}$$

Base gravable: $y_t + r_{t-1} b_{t-1}$

- Si $b_{t-1} > 0$: ingresos por intereses son gravados y la tasa neta de interés es $(1-\tau_t^y) r_t$
- Si $b_{t-1} < 0$: gasto en intereses reduce su base gravable.

τ_t^y es tasa de impuestos a ingresos por intereses / subsidio a gastos por intereses.